

NGHIÊN CỨU SỬ DỤNG HÀM CƠ SỞ BÁN KÍNH WENDLAND CHO PHƯƠNG PHÁP RBF-FD GIẢI PHƯƠNG TRÌNH POISSON TRONG KHÔNG GIAN BA CHIỀU

Ngô Mạnh Tường, Nguyễn Thị Thanh Giang, Nguyễn Thị Nhung
Trường Đại học Công nghệ thông tin và Truyền thông, Đại học Thái Nguyên
Ngày nhận bài 23/11/2021, ngày nhận đăng 17/12/2021

Tóm tắt: Trong những năm gần đây, phương pháp không lưới RBF-FD (Radial Basis Function -Finite Difference) giải phương trình đạo hàm riêng trong không gian 3 chiều đã nhận được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học. Để tìm véc tơ trọng số RBF-FD, các tác giả đã sử dụng nội suy hàm cơ sở bán kính Power, không phụ thuộc vào tham số hình dạng. Bài báo này trình bày kết quả nghiên cứu việc sử dụng nội suy hàm cơ sở bán kính Wendland để tính véc tơ trọng số cho phương pháp RBF-FD giải phương trình Poisson trong không gian 3 chiều. Kết quả thử nghiệm số cho thấy nghiệm của phương pháp RBF-FD sử dụng hàm Wendland có độ chính xác tốt so với nghiệm của phương pháp phần tử hữu hạn (FEM - Finite Element Method).

Từ khóa: Phương pháp RBF-FD; trọng số RBF-FD; thuật toán dựa trên các góc khối; chọn giá véc tơ trọng số; thuật toán chọn tâm.

1 Giới thiệu

Xét phương trình Poisson trong không gian 3 chiều với điều kiện biên Dirichlet: Cho miền mở $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ và các hàm số f xác định trên Ω , g xác định trên $\partial\Omega$. Tìm hàm $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$Lu = f \quad \text{trong } \Omega, \quad (1.1)$$

$$u = g \quad \text{trên } \partial\Omega, \quad (1.2)$$

trong đó L là toán tử Laplace trong không gian 3 chiều.

Bài toán (1.1)–(1.2) được rời rạc hóa bởi phương pháp sai phân như sau: Giả sử $\Theta \subset \bar{\Omega}$ là tập hữu hạn các tâm rời rạc. Gọi $\Theta_{\text{int}} := \Theta \cap \Omega$ là các tâm nằm trong miền và $\partial\Theta := \Theta \cap \partial\Omega$ là các tâm nằm trên biên. Với mỗi tâm $\varsigma \in \Theta_{\text{int}}$, chọn tập các tâm hỗ trợ phương pháp không lưới $\Theta_{\varsigma} := \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k\} \subset \Theta$, với $\tau_0 = \varsigma$. Khi đó Bài toán (1.1)–(1.2) được rời rạc thành hệ phương trình

$$\sum_{\tau \in \Theta_{\varsigma}} \omega_{\varsigma, \tau} \hat{u}_{\tau} = f(\varsigma), \quad \varsigma \in \Theta_{\text{int}}, \quad (1.3)$$

$$u = g(\tau), \quad \tau \in \partial\Theta, \quad (1.4)$$

¹⁾ Email:nmtuong@ictu.edu.vn (N. M. Tường)

với \hat{u} là nghiệm xấp xỉ của u và $\omega_{\varsigma, \tau} \in \mathbb{R}$ là véc tơ trọng số được tìm bằng nội suy RBF. Để tìm nghiệm xấp xỉ \hat{u} của bài toán (1.3)–(1.4) thì cần giải quyết 3 vấn đề: Cách tạo bộ tâm rời rạc Θ ; Cách chọn tập các tâm hỗ trợ Θ_{ς} , $\varsigma \in \Theta_{\text{int}}$; Cách tính trọng số $\omega_{\varsigma, \tau} \in \mathbb{R}$.

Phương pháp RBF-FD là phương pháp không lưới sử dụng nội suy hàm cơ sở bán kính (RBF) tính véc tơ trọng số $\omega_{\varsigma, \tau} \in \mathbb{R}$ với cách tiếp cận địa phương, dựa trên sự rời rạc hóa giống như phương pháp sai phân hữu hạn để tính nghiệm xấp xỉ \hat{u} tại một số điểm rời rạc trong miền Θ_{int} . Phương pháp không lưới RBF-FD được giới thiệu lần đầu tiên vào năm 2003 bởi Tolstykh và Shirobokov [1] bằng việc sử dụng nội suy hàm cơ sở bán kính (RBF - Radial Basis Function) dựa trên cấu trúc điểm của phương pháp sai phân hữu hạn (FD-Finite Difference) giải bài toán elliptic trong không gian 2 chiều. Năm 2006, Wright và Fornberg [2] tiếp tục đề xuất phương pháp không lưới RBF-FD trong không gian 2 chiều sử dụng nội suy Hermite. Năm 2011, các tác giả Oleg Davydov và Đặng Thị Oanh [3], [4] đã đề xuất phương pháp RBF-FD đơn điểm, đa điểm và thuật toán chọn bộ tâm hỗ trợ tính véc tơ trọng số Θ_{ς} , $\varsigma \in \Theta_{\text{int}}$, thuật toán sinh tập các tâm Θ thích nghi, thuật toán ước lượng tham số hình dạng cho nội suy RBF. Năm 2017, nhóm tác giả Đặng Thị Oanh, Oleg Davydov và Hoàng Xuân Phú [5] tiếp tục cải tiến các thuật toán chọn tâm hỗ trợ phương pháp không lưới Θ_{ς} , $\varsigma \in \Theta_{\text{int}}$, thuật toán sinh bộ tâm Θ thích nghi cho các bài toán có hàm véc tơ phải có kỳ dị và miền hình học phức tạp trong không gian 2 chiều. Các nghiên cứu gần đây [6 – 8], các tác giả đã giới thiệu các thuật toán chọn bộ tâm Θ_{ς} , $\varsigma \in \Theta_{\text{int}}$ hỗ trợ tính véc tơ trọng số cho phương pháp RBF-FD trong không gian 3 chiều.

Đặc trưng của phương pháp RBF-FD là sử dụng nội suy hàm cơ sở bán kính RBF để tính véc tơ trọng số $\omega_{\varsigma, \tau} \in \mathbb{R}$. Đối với các nghiên cứu trong không gian 2 chiều [3-5], các tác giả đã sử dụng nội suy hàm Gauss RBF $\varphi(r) = e^{-\varepsilon^2 r^2}$, $r = \|x\|_2, x \in \mathbb{R}^2$, trong đó ε là tham số hình dạng và giới thiệu thuật toán tìm giá trị tham số tối ưu cho nội suy hàm RBF trong [4]. Trong không gian 3 chiều, các nghiên cứu [6-8] đã sử dụng hàm Power RBF $\varphi(r) = r^5$, $r = \|x\|_2, x \in \mathbb{R}^3$, ưu điểm của hàm Power RBF là không phụ thuộc vào tham số hình dạng. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu và thử nghiệm việc tính véc tơ trọng số $\omega_{\varsigma, \tau} \in \mathbb{R}$ bằng nội suy hàm Wendland RBF, đồng thời cũng cải tiến thuật toán dựa trên các Octant được đề xuất trong [6] để cải thiện độ chính xác của nghiệm xấp xỉ \hat{u} của bài toán (1.3)–(1.4).

Bài báo gồm 5 phần: Sau Phần giới thiệu là Phần 2 miêu tả nội suy RBF tính véc tơ trọng số RBF-FD; Phần 3 giới thiệu thuật toán chọn giá véc tơ trọng số; Phần 4 trình bày kết quả thử nghiệm số và Phần cuối là kết luận.

2 Nội suy RBF tính véc tơ trọng số RBF-FD

Trong không gian 3 chiều [6-8], véc tơ trọng số $\omega_{\varsigma, \tau} \in \mathbb{R}$ được tính dựa vào nội suy hàm cơ sở bán kính RBF, cụ thể như sau: Cho hàm xác định dương $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ và hàm cơ sở bán kính $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $\phi(x) := \varphi(\|x\|_2)$, $x \in \mathbb{R}^d$, trong đó $\|\cdot\|_2$ là chuẩn Euclide, (chi tiết xem [9 – 11]). Gọi $\Theta_{\varsigma} := \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\} \subset \mathbb{R}^d$ là bộ tâm rời rạc và hàm $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

liên tục. Khi đó hàm nội suy cơ sở bán kính s của hàm u được xác định như sau

$$s(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi(x - \tau_i), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (2.1)$$

$$s(\tau_j) = u(\tau_j), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

trong đó $c_i, i = 1, 2, \dots, n$ được tìm từ điều kiện nội suy (2.2)

$$s(\tau_j) = \sum_{i=1}^n c_i \phi(\tau_j - \tau_i) = u(\tau_j), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

hay

$$A|_{\Theta_\varsigma} c = u|_{\Theta_\varsigma},$$

với

$$c := (c_1, c_2, \dots, c_n)^T, \quad u|_{\Theta_\varsigma} := (u(\tau_1), u(\tau_2), \dots, u(\tau_n))^T,$$

$$A|_{\Theta_\varsigma} := \begin{pmatrix} \phi(0) & \phi(\tau_1 - \tau_2) & \cdots & \phi(\tau_1 - \tau_n) \\ \phi(\tau_2 - \tau_1) & \phi(0) & \cdots & \phi(\tau_2 - \tau_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(\tau_n - \tau_1) & \phi(\tau_n - \tau_2) & \cdots & \phi(0) \end{pmatrix} = [\phi(\tau_j - \tau_i)]_{j,i=1}^n.$$

Do ϕ là hàm xác định dương nên ma trận $A|_{\Theta_\varsigma}$ là xác định dương với bộ tâm Θ_ς , nên c được xác định duy nhất

$$c = [A|_{\Theta_\varsigma}]^{-1} u|_{\Theta_\varsigma}. \quad (2.3)$$

Từ (2.2) ta xấp xỉ toán tử vi phân $Lu(x)$ bởi công thức

$$Lu(x) \simeq Ls(x) = \sum_{i=1}^n c_i L\phi(x - \tau_i) = c^T \cdot L\phi(x - \cdot)|_{\Theta_\varsigma}. \quad (2.4)$$

Thay (2.3) và (2.4) suy ra

$$Lu(x) \simeq \sum_{i=1}^n \omega_i u(\tau_i),$$

trong đó

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T = [A|_{\Theta_\varsigma}]^{-1} \cdot L\phi(x - \cdot)|_{\Theta_\varsigma} \quad (2.5)$$

được gọi là véc tơ trọng số và

$$L\phi(x - \cdot)|_{\Theta_\varsigma} = (L\phi(x - \tau_1), L\phi(x - \tau_2), \dots, L\phi(x - \tau_n))^T.$$

Để tìm trọng số RBF-FD bởi công thức (2.5) trong không gian 3 chiều [6-8], các tác giả đã sử dụng hàm Power RBF $\varphi(r) = r^5$, $r = \|x\|_2$, $x \in \mathbb{R}^3$, không phụ thuộc tham số hình

dạng, với $L\phi(r) = 20r^3$. Trong bài báo này chúng tôi sử dụng hàm xác định dương chặt Wendland RBF

$$\varphi_{3,2}(r) = (1 - \varepsilon r)_+^6 \left(35(\varepsilon r)^2 + 18\varepsilon r + 3 \right), \quad r = \|x\|_2, x \in \mathbb{R}^3,$$

khi đó

$$L\phi_{3,2}(r) = 56\varepsilon^2 \left(35(\varepsilon r)^2 - 4\varepsilon r - 1 \right) (1 - \varepsilon r)_+^4,$$

với ε là tham số hình dạng được chọn cố định $\varepsilon = 0, 1$.

Vậy với mỗi bộ tâm hỗ trợ tính toán véc tơ trọng số Θ_ς , ta tìm được véc tơ trọng số tương ứng ω_ς bởi công thức (2.5). Độ chính xác của ω_ς phụ thuộc vào việc chọn bộ tâm Θ_ς . Các thuật toán tìm Θ_ς trong không gian 3 chiều đã được giới thiệu trong [6 – 8], trong phần tiếp theo chúng tôi sẽ giới thiệu thuật toán cải tiến dựa trên thuật toán Octant được giới thiệu trong [6] cho phương pháp RBF-FD trong không gian 3 chiều.

3 Thuật toán chọn giá véc tơ trọng số

Phương pháp RBF-FD sử dụng miền Θ có các tâm phân bố bất kỳ. Mục tiêu của các thuật toán chọn tập các tâm Θ_ς trong không gian 3 chiều được giới thiệu trong [6 – 8] là: Với mỗi tâm $\varsigma \in \Theta_{\text{int}}$, chọn tập $\Theta_\varsigma := \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k\} \subset \Theta$, với $\tau_0 = \varsigma$, xung quanh gốc ς , gần và đều nhất có thể. Thuật toán chọn Θ_ς thỏa mãn điều kiện gần về mặt khoảng cách được đề xuất trong [7] và thuật toán thỏa mãn cả hai điều kiện vừa gần về khoảng cách, vừa đều xung quanh gốc ς được giới thiệu bởi [6, 8], các thuật toán này đều bắt đầu với m ($m=100$) điểm, $M := \{\tau_1, \tau_2 \dots, \tau_m\}$ xung quanh và gần gốc ς nhất, sau đó phân hoạch m điểm này vào 8-Octant hoặc 16-Octant dựa trên dấu của các thành phần tọa độ của véc tơ $\vec{\tau}_i, i = 1, 2, \dots, m$ như Bảng 1 và Bảng 2 trong [6]. Với thuật toán chia 8-Octant (thuật toán 1, [6]) chọn 2 điểm gần nhất trên mỗi Octant, còn thuật toán chia 16-Octant (thuật toán 2, [6]) chọn một điểm gần nhất trên mỗi Octant. Thuật toán 8-Octant và 16-Octant rất hiệu quả với miền hình học là khối lập phương hoặc khối cầu, tuy nhiên trên cùng một Octant hoặc hai Octant liên kề có thể có những điểm rất gần nhau được chọn, nên các thuật toán này chưa thực sự hiệu quả với miền hình học phức tạp. Để khắc phục hạn chế của 2 thuật toán này các tác giả đã giới thiệu thuật toán cải tiến trong [8], loại đi các điểm quá gần nhau hoặc quá xa gốc ς tại Bước I.4 của thuật toán trong [8], việc loại đi các điểm quá gần nhau có thể dẫn đến việc loại đi điểm tốt, hơn nữa việc kiểm tra và thay thế điểm ngoài miền của m điểm ban đầu tại Bước I.2 của thuật toán trong [8], sẽ làm tăng chi phí tính toán của thuật toán. Trong phần này chúng tôi sẽ giới thiệu thuật toán cải tiến của thuật toán dựa trên các Octant, thay vì sử dụng khoảng cách trung bình của 6 điểm gần nhất như trong [8], chúng tôi chỉ sử dụng khoảng cách gần nhất từ ς đến tập M và kiểm tra, loại đi điểm ngoài miền địa phương trên tập Θ_ς , không thay thế điểm trên biên. Nội dung của thuật toán như sau:

Thuật toán 1: (*Cải tiến thuật toán 8-Octant*)

Input: Bộ tâm rời rạc Θ , $\varsigma \in \Theta_{\text{int}}$.

Output: Tập tâm hỗ trợ Θ_ς .

Các tham số: k (số tâm được chọn) và m ($m > k$, số tâm ứng viên ban đầu).

- I. Tìm m tâm $M := \{\tau_1, \dots, \tau_m\} \subset \Theta \setminus \{\varsigma\}$ xung quanh ς . Khởi tạo $\Theta_\varsigma := \{\varsigma\}$.
- II. Với $i = 2, 3, \dots, m$.
Nếu $\text{dist}(\tau_i, M \setminus \{\tau_i\}) \leq \frac{2}{3}\|\tau_1 - \varsigma\|_2$ hoặc $\|\tau_i - \varsigma\|_2 > 15\|\tau_1 - \varsigma\|_2$ thì $M := M \setminus \{\tau_i\}$, trong đó $\text{dist}(\tau_i, M \setminus \{\tau_i\}) := \min\{\|\tau_i - y\|_2, y \in M \setminus \{\tau_i\}\}$.
- III. Phân hoạch các điểm của tập M vào 8-Octant $O_j = \{\tau_{j1}, \tau_{j2}, \dots\}, j = 1, 2, \dots, 8$ tương ứng với Bảng 1 trong [6], thỏa mãn $\|\tau_{j1} - \varsigma\|_2 \leq \|\tau_{j2} - \varsigma\|_2 \leq \dots$.
- IV. Với $j = 1, 2, \dots, 8$
Nếu $\#O_j = 1$ thì $\Theta_\varsigma = \Theta_\varsigma \cup \{\tau_{j1}\}$, nếu $\#O_j > 1$ thì $\Theta_\varsigma = \Theta_\varsigma \cup \{\tau_{j1}, \tau_{j2}\}$.
- V. Với mỗi $\tau_j \in \Theta_\varsigma \setminus \{\tau_j\}$, nếu $(\varsigma, \tau_j) \cap \partial\Theta \neq \emptyset$ thì $\Theta_\varsigma = \Theta_\varsigma \setminus \{\tau_j\}$, trong đó $(\varsigma, \tau_j) = \{\varsigma + c(\tau_j - \varsigma) : 0 < c < 1\}$ là đoạn thẳng từ ς đến τ_j .

Bằng cách tương tự ta có thuật toán cải tiến của thuật toán 16-Octant khi cải tiến Bước III và IV của thuật toán này.

Thuật toán 2: (*Cải tiến thuật toán 16-Octant*)

Input: Bộ tâm rời rạc $\Theta, \varsigma \in \Theta_{\text{int}}$.

Output: Tập tâm hỗ trợ Θ_ς .

Các tham số: k (số tâm được chọn) và m ($m > k$, số tâm ứng viên ban đầu).

- I. Tìm m tâm $M := \{\tau_1, \dots, \tau_m\} \subset \Theta \setminus \{\varsigma\}$ xung quanh ς . Khởi tạo $\Theta_\varsigma := \{\varsigma\}$.
- II. Với $i = 2, 3, \dots, m$
Nếu $\text{dist}(\tau_i, M \setminus \{\tau_i\}) \leq \frac{2}{3}\|\tau_1 - \varsigma\|_2$ hoặc $\|\tau_i - \varsigma\|_2 > 15\|\tau_1 - \varsigma\|_2$ thì $M := M \setminus \{\tau_i\}$, trong đó $\text{dist}(\tau_i, M \setminus \{\tau_i\}) := \min\{\|\tau_i - y\|_2, y \in M \setminus \{\tau_i\}\}$.
- III. Phân hoạch các điểm của tập M vào 16-Octant $O_j = \{\tau_{j1}, \tau_{j2}, \dots\}, j = 1, 2, \dots, 16$ tương ứng với Bảng 2 trong [6], thỏa mãn $\|\tau_{j1} - \varsigma\|_2 \leq \|\tau_{j2} - \varsigma\|_2 \leq \dots$.
- IV. Với $j = 1, 2, \dots, 16$
Nếu $\#O_j \geq 1$ thì $\Theta_\varsigma = \Theta_\varsigma \cup \{\tau_{j1}\}$.
- V. Với mỗi $\tau_j \in \Theta_\varsigma \setminus \{\tau_j\}$, nếu $(\varsigma, \tau_j) \cap \partial\Theta \neq \emptyset$ thì $\Theta_\varsigma = \Theta_\varsigma \setminus \{\tau_j\}$, trong đó $(\varsigma, \tau_j) = \{\varsigma + c(\tau_j - \varsigma) : 0 < c < 1\}$ là đoạn thẳng từ ς đến τ_j .

Trong các thử nghiệm số, tham số sử dụng trong thuật toán 1, thuật toán 2 là $m=100$ và $k=17$ (gồm cả gốc ς). Vì sự phân bố tâm trên các Octant có thể không đủ số điểm hoặc rộng nên bước IV của các thuật toán có thể chỉ chọn được số điểm của tập Θ_ς nhỏ hơn 17, hơn nữa bước V của các thuật toán có thể loại bớt điểm thuộc tập Θ_ς nếu nó không thuộc miền địa phương, do đó số điểm của tập Θ_ς càng nhỏ đi.

Bước II của các thuật toán 1, 2 sử dụng khoảng cách gần gốc ς nhất trong tập M , trong [8] các tác giả có sử dụng điều kiện này, tuy nhiên lại sử dụng giá trị trung bình của khoảng cách 6 điểm gần ς nhất, khi đó có thể loại đi điểm gần nhất đầu tiên, có thể là điểm tốt.

Kiểm tra điều kiện các điểm có thuộc miền địa phương hay không, đối với các thuật toán trong [6], [8], các tác giả đều thay thế điểm ngoài miền địa phương bằng điểm gần hơn trên biên, tuy nhiên việc thay thế này sẽ xuất hiện những điểm quá gần nhau đã có từ trước như trong [6], hoặc để khắc phục được điều kiện này như trong [8] đã đề xuất, nhưng cách làm này tốn kém vì kiểm tra trên tập m điểm ban đầu, tuy nhiên Bước V trong thuật toán 1, thuật toán 2 thực hiện việc kiểm tra trên tập Θ_ζ đã được lựa chọn và loại bỏ điểm ngoài miền, không thay thế điểm trên biên.

4 Thử nghiệm số

Trong thử nghiệm số, chúng tôi sử dụng sai số trung bình bình phương tương đối $rrms$ (relative root mean square) để đánh giá sự hiệu quả của phương pháp RBF-FD khi sử dụng các thuật toán cải tiến và sử dụng nội suy Wendland RBF để tính trọng số. Sai số $rrms$ được tính bởi công thức

$$rrms := \sqrt{\frac{\sum_{\zeta \in \Theta_{int}} (\hat{u}(\zeta) - u(\zeta))^2}{\sum_{\zeta \in \Theta_{int}} (u(\zeta))^2}}. \tag{4.1}$$

Ngoài so sánh sai số $rrms$ trên tâm và trên lưới đều của miền rời rạc, chúng tôi còn so sánh mật độ của ma trận hệ số của hệ phương trình (1.3)–(1.4) của phương pháp RBF-FD với mật độ của ma trận cứng của FEM.

Bài toán 1 (Phần 6, [13]): Xét bài toán Poisson $\Delta u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ trên miền khối lập phương khuyết $\Omega = [-1, 1]^3 \setminus [0, 1]^3$ như Hình 1(a), với điều kiện biên biên Dirichlet đồng nhất $u(x, y, z) = 0$.

Bộ tâm Θ của bài toán được tạo bởi PDE Toolbox của MATLAB ứng với $Hmax = 0,25$ và các nút trên lưới đều có bước lưới 0,01 với lưới thô nhất ứng với có 399 điểm trong miền. Trong các bảng và hình biểu diễn kết quả thử nghiệm số, cột thứ nhất của các bảng là số tâm trong miền Θ , ký hiệu là $\#\Theta_{int}$. Kết quả của phương pháp FEM là “fem”, “oct8” và “oct16” là các kết quả của phương pháp RBF-FD sử dụng thuật toán 8-Octant, 16-Octant và sử dụng nội suy hàm Power RBF để tính trọng số trong [8], “oct8-w” và “oct16-w” là kết quả của phương pháp RBF-FD sử dụng các thuật toán cải tiến thuật toán 1, thuật toán 2 và nội suy Wendland RBF để tính trọng số.

Bài toán không có nghiệm giải tích, nghiệm u của bài toán trong công thức (4.1) là nghiệm tham chiếu được công bố trên website <https://math.nist.gov> với 147202 tâm. Kết quả thử nghiệm số của bài toán được biểu diễn trong Bảng 4, Hình 1(c) và sai số $rrms$ trên tâm được biểu diễn trong Bảng 4, Hình 1(c) và sai số $rrms$ trên lưới được biểu diễn trong Bảng 4, Hình 1(d).

Từ Bảng 4, Bảng 4 và Hình 1(c), (d) cho thấy sai số $rrms$ cả trên tâm và trên lưới đều của phương pháp RBF-FD “oct8-w” và “oct16-w” nhỏ hơn đáng kể của sai số $rrms$ của “fem”, trong khi sai số $rrms$ của phương pháp RBF-FD “oct8” và “oct16” lại cao hơn đáng kể của “fem”. Hình 1(b) biểu diễn mật độ ma trận hệ số và cho thấy, mật độ của ma trận cứng của “fem” bằng 14,5. Do loại đi một số điểm không thuộc miền tại Bước V của

Bảng 1: Sai số *rrms* trên tâm của Bài toán 1.

# Θ_{int}	Sai số <i>rrms</i>				
	fem	RBF-FD			
		oct8	oct8-w	oct16	oct16-w
399	6,59e-02	9,84e-02	6,35e-02	1,01e-01	6,82e-02
832	5,47e-02	5,56e-02	3,77e-02	7,32e-02	3,77e-02
1767	3,72e-02	5,62e-02	3,57e-02	5,30e-02	3,24e-02
3763	2,55e-02	3,90e-02	2,34e-02	3,55e-02	1,84e-02
7964	1,83e-02	2,30e-02	1,43e-02	2,22e-02	1,22e-02
17219	1,30e-02	1,69e-02	1,17e-02	1,77e-02	8,88e-03
35515	9,35e-03	1,19e-02	7,68e-03	1,30e-02	7,25e-03
72712	7,29e-03	1,05e-02	6,44e-03	1,15e-02	5,98e-03
147237	5,46e-03	7,01e-03	4,43e-03	7,07e-03	4,65e-03

Bảng 2: Sai số *rrms* trên lưới của Bài toán 1.

# Θ_{int}	Sai số <i>rrms</i>				
	fem	RBF-FD			
		oct8	oct8-w	oct16	oct16-w
399	1,16e-01	1,44e-01	1,15e-01	1,48e-01	1,20e-01
832	8,60e-02	8,74e-02	7,22e-02	1,03e-01	7,23e-02
1767	5,93e-02	7,61e-02	5,79e-02	7,34e-02	5,47e-02
3763	3,80e-02	4,95e-02	3,56e-02	4,67e-02	3,11e-02
7964	2,58e-02	2,99e-02	2,21e-02	2,91e-02	2,01e-02
17219	1,75e-02	2,10e-02	1,61e-02	2,18e-02	1,35e-02
35515	1,20e-02	1,44e-02	1,04e-02	1,55e-02	9,84e-03
72712	8,88e-03	1,20e-02	8,03e-03	1,29e-02	7,52e-03
147237	6,27e-03	7,81e-03	5,16e-03	7,88e-03	5,40e-03

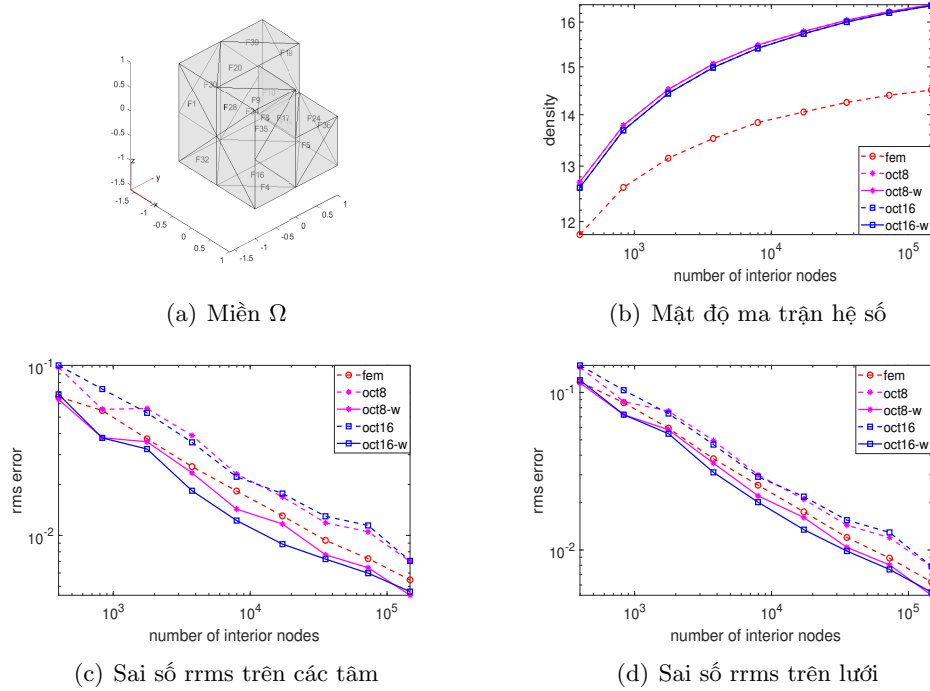
thuật toán và không thêm vào điểm biên nên mật độ của ma trận hệ số của phương pháp RBF-FD “oct8-w” và “oct16-w” bằng 16,5 và nhỏ hơn một chút so với mật độ ma trận hệ số của phương pháp RBF-FD “oct8” và “oct16” là xấp xỉ 16,5.

Bài toán 2: Xét bài toán Poisson $\Delta u = x^2 + y^2 + z^2$ trên khối cầu đơn vị như Hình 2(a),

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

với điều kiện biên Dirichlet thỏa mãn nghiệm chính xác của bài toán là $u(x, y, z) = 6$.

Kết quả thử nghiệm số của bài toán được biểu diễn trong Bảng 4, Bảng 4, Hình 2. Từ kết quả Bảng 4 và Hình 2(c) ta thấy sai số *rrms* trên tâm của phương pháp RBF-FD “oct8-w” và “oct16-w” nhỏ hơn từ 1,7 đến xấp xỉ 10 lần kết quả của phương pháp RBF-FD “oct8” và “oct16” và của “fem”. Bảng 4 và Hình 2(d) cho thấy sai số *rrms* trên lưới đều với bước lưới 0,01 của các phương pháp là như nhau. Mật độ của ma trận hệ số của các phương pháp được biểu diễn trong Hình 2(b) cho thấy, do loại đi các điểm không thuộc miền địa phương nên mật độ của ma trận hệ số của phương pháp RBF-FD “oct8-w” và “oct16-w” xấp xỉ 16,5 và nhỏ hơn một chút so với mật độ ma trận hệ số của phương pháp RBF-FD “oct8” và “oct16” (xấp xỉ 16,5), trong khi mật độ của ma trận cứng của “fem” bằng 14,5.



Hình 1: Kết quả thử nghiệm số của Bài toán 1.

Bảng 3: Sai số rrms trên tâm của Bài toán 2.

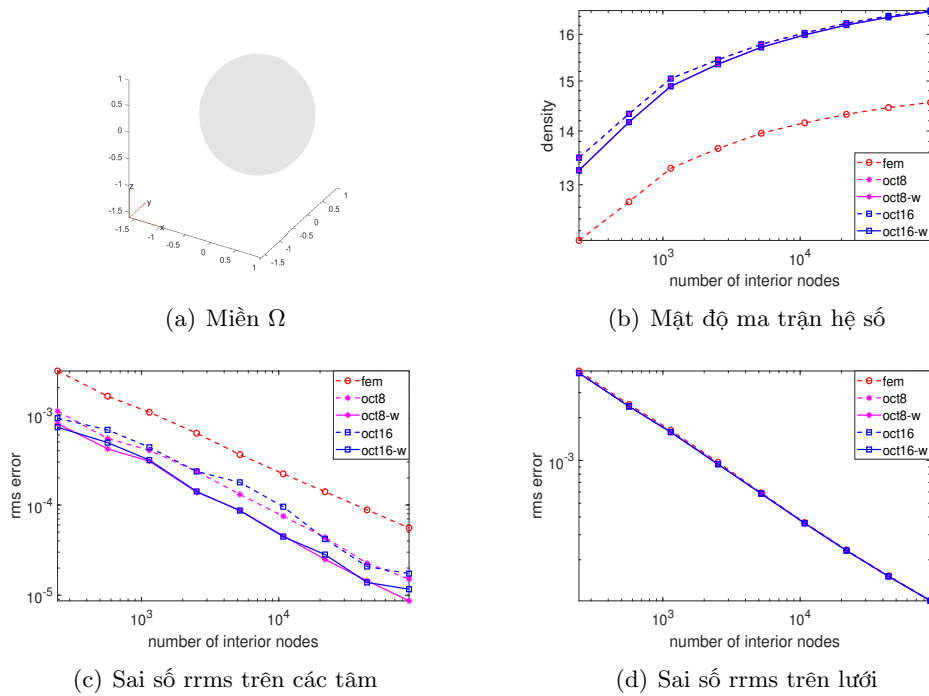
# Θ_{int}	Sai số rrms				
	fem	RBF-FD			
		oct8	oct8-w	oct16	oct16-w
245	3,07e-03	1,10e-03	6,12e-04	9,18e-04	3,90e-04
567	1,61e-03	5,47e-04	4,67e-04	6,82e-04	2,49e-04
1142	1,07e-03	4,04e-04	2,06e-04	4,37e-04	1,34e-04
2523	6,26e-04	2,36e-04	1,23e-04	2,36e-04	6,75e-05
5207	3,62e-04	1,31e-04	5,83e-05	1,78e-04	4,95e-05
10780	2,22e-04	7,52e-05	2,67e-05	9,58e-05	1,92e-05
21730	1,40e-04	4,38e-05	1,49e-05	4,19e-05	1,41e-05
43956	8,84e-05	2,26e-05	7,69e-06	2,08e-05	9,25e-06
88936	5,57e-05	1,51e-05	6,01e-06	1,74e-05	5,75e-06

5 Kết luận

Kết quả các thử nghiệm số cho thấy nghiệm của phương pháp RBF-FD sử dụng các thuật cải tiến từ thuật toán 8-Octant, 16-Octant và nội suy Wendland RBF giải phương trình Poisson trong không gian 3 chiều có độ chính xác cao hơn nghiệm của phương pháp RBF-FD sử dụng thuật toán 8-Octant, 16-Octant trong [8] và của FEM.

Bảng 4: Sai số rrms trên lưới của Bài toán 2.

# Θ_{int}	Sai số rrms				
	fem	RBF-FD			
		oct8	oct8-w	oct16	oct16-w
245	4,26e-03	4,12e-03	4,12e-03	4,11e-03	4,11e-03
567	2,47e-03	2,40e-03	2,40e-03	2,41e-03	2,41e-03
1142	1,63e-03	1,58e-03	1,58e-03	1,58e-03	1,58e-03
2523	9,71e-04	9,41e-04	9,41e-04	9,42e-04	9,42e-04
5207	5,91e-04	5,84e-04	5,84e-04	5,83e-04	5,84e-04
10780	3,66e-04	3,61e-04	3,61e-04	3,61e-04	3,61e-04
21730	2,35e-04	2,32e-04	2,32e-04	2,33e-04	2,33e-04
43956	1,54e-04	1,53e-04	1,53e-04	1,53e-04	1,53e-04
88936	1,03e-04	1,03e-04	1,03e-04	1,03e-04	1,03e-04



Hình 2: Kết quả thử nghiệm số của Bài toán 2.

LỜI CẢM ƠN: Bài báo được tài trợ bởi Đề tài cấp cơ sở, mã số T2021-07-11 của Trường Đại học Công nghệ thông tin và truyền thông - Đại học Thái Nguyên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] A. I. Tolstykh and D. A. Shirobokov, “On using radial basis functions in a ‘finite difference mode’ with applications to elasticity problems”, *Computational Mechanics*, 33(1), pp. 68-79, 2003.
- [2] G. B. Wright and B. Fornberg, “Scattered node compact finite difference-type formulas generated from radial basis functions”, *J. Comput. Phys.*, 212(1), pp. 99-123, 2006.
- [3] O. Davydov and O. T. Dang, “Adaptive meshless centres and RBF stencils for Poisson equation”, *J. Comput. Phys.*, 230, pp. 287-304, 2011.
- [4] O. Davydov and O. T. Dang, “On the optimal shape parameter for Gaussian Radial Basis Function finite difference approximation of Poisson equation”, *Computers and Mathematics with Applications*, 62, pp. 2143-2161, 2011.
- [5] O. T. Dang, O. Davydov, and P. X. Hoang, “Adaptive RBF-FD method for elliptic problems with point Singularities in 2d”, *Applied Mathematics and Computation*, 313, pp. 474-497, 2017.
- [6] O. Davydov, T. O. Dang, and M. T. Ngo, “Octantbased stencil selection for meshless finite difference methods in 3D,” *Vietnam Journal of Mathematics*, Vol. 48, pp. 93-106, 2020.
- [7] M. T. Ngo, T. T. G. Nguyen, and T. N. Nguyen, “The RBF-FD Method to solve the Poisson equation in 3d with the k-nearest points,” (in Vietnamese), *TNU Journal of Science and Technology*, Vol. 204, No. 11, Natural Sciences - Engineering - Technology, pp. 9-15, 2019.
- [8] M. T. Ngo, T. T. G. Nguyen, and T. N. Nguyen, “Research the oct-based algorithm for meshless RBF-FD methods to solve the poisson equation on complicated 3d domains,” (in Vietnamese), *TNU Journal of Science and Technology*, Vol. 225, No. 14, Natural Sciences - Engineering - Technology, pp. 62-69, 2020.
- [9] H. Wendland, *Scattered Data Approximation*, Cambridge University Press, 2005.
- [10] M. D. Buhmann, *Radial Basis Functions*, Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2003.
- [11] G. F. Fasshauer, *Meshfree Approximation Methods with MATLAB*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, USA, 2007.
- [12] The MathWorks, *Partial Differential Equation Toolbox™ User’s Guide, Inc*, 2009.

[13] T. Apel. and S. Nicaise, “The Finite Element Method with Anisotropic Mesh Grading for Elliptic Problems in Domains with Corners and Edges”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Vol 21, pp. 519-549, 1998.

SUMMARY

RESEARCH USING THE WENDLAND RBF FOR THE RBF-FD METHOD TO SOLVE THE POISSON EQUATION IN 3D

Ngo Manh Tuong, Nguyen Thi Thanh Giang, Nguyen Thi Nhung

University of Information and Communication Technology, Thai Nguyen University

Received on 23/11/2021, accepted for publication on 17/12/2021

In recent years, the meshless finite difference method based on radial basis functions (RBF-FD) of solving partial differential equation in 3D has been studied by many scientists. To find the RBF-FD weight vector, the authors used the Power RBF interpolation, which does not depend on the shape parameter. This paper presents the research results of using Wendland RBF interpolation to find the weight vectors for the RBF-FD method to solve Poisson equations in 3D. The numerical experiments showed that the solution of the RBF-FD method using the Wendland function has good accuracy compared to the solution of the finite element method (FEM - Finite Element Method).

Keywords: RBF-FD method; RBF-FD weight; the octant-based algorithm; stencil support selection; the center selection algorithm.